Jordan 標準形の手短な証明の紹介

[2009-05-08][2010-12-03] 平岡和幸

概 要

任意の線形変換 f は Jordan 標準形で表せることを、参考文献 [2] の方法（本質的には参考文献 [1] と同様）で手短に示す。$\mathrm{Im}\, f$ 上の Jordan 標準形を全空間へと拡張できることが証明の鍵である。なお、参考文献 [3] 程度の知識を前提とする。

1 準備

n 次元複素線形空間 V 上の線形変換 $f: V \to V$ が与えられたとしよう[1]。V 内の l 本のベクトルたち $\boldsymbol{p}(1), \dots, \boldsymbol{p}(l)$ を $\boldsymbol{p}(1:l)$ のようにまとめて略記する。さらに、$f(\boldsymbol{p}(1)), \dots, f(\boldsymbol{p}(l))$ も同様に $f(\boldsymbol{p}(1:l))$ と略記する。また、複素数 c に対して、$f(\boldsymbol{p}) - c\boldsymbol{p}$ のことを $(f-c)(\boldsymbol{p})$ と書く。

V 内の（$\boldsymbol{o}$ でない）ベクトルたち $\boldsymbol{p}(1:l)$ と複素数 λ が

$$(f-\lambda)(\boldsymbol{p}(1:l)) = \boldsymbol{p}(0:l-1), \quad \text{（ただし } \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{o} \text{ とおく）} \tag{1}$$

を満たすとき、$\boldsymbol{p}(1:l)$ を「f の固有値 λ に対する長さ l の Jordan 系列」と呼ぶことにする[2]。「いくつかの Jordan 系列」からなる V の基底を Jordan 基底と呼ぶことにしよう。f をこの基底で行列表示すると Jordan 標準形になる[3]。

定義からすぐわかるように、f の Jordan 基底は、任意の複素数 c に対する $f-c$ の Jordan 基底でもある[4]。

2 証明

以上をふまえて、任意の f が Jordan 基底を持つことを示そう。

証明は次元に関する帰納法による。$n=0$ のときは、0 本のベクトルからなる空の基底がそのまま Jordan 基底だと解釈される。そこで $n \geq 1$ とし、n 次元未満の場合には Jordan 基底の存在がすでに言えたとしよう。

このとき、$\mathrm{rank}\, f < n$ と仮定して一般性を失わない。実際、もし $\mathrm{rank}\, f = n$ だった場合は、以下の手続きをとればよい：f の固有値の一つを μ とおくとき、固有値の定義から $\mathrm{rank}(f-\mu) < n$ である。また、上の準備で述べたことから、$f-\mu$ が Jordan 基底を持て

---

[1] こういう物言いに慣れていない人は、「n 次（複素）正方行列 A が与えられた」と思ってもらえば OK。線形写像を何らかの基底で表したものが行列でした（$\to$ [3] の p.23「？1.15」)。

[2] 要するに $\boldsymbol{o} \xleftarrow{f-\lambda} \boldsymbol{p}_1 \xleftarrow{f-\lambda} \boldsymbol{p}_2 \xleftarrow{f-\lambda} \cdots \xleftarrow{f-\lambda} \boldsymbol{p}_l$。行列で書けば $\boldsymbol{o} \xleftarrow{A-\lambda I} \boldsymbol{p}_1 \xleftarrow{A-\lambda I} \boldsymbol{p}_2 \xleftarrow{A-\lambda I} \cdots \xleftarrow{A-\lambda I} \boldsymbol{p}_l$。ただし I は単位行列を表す。

[3] 行列で言えば、A を Jordan 標準形に変換することができる。理由は [3] の 4.7.6 冒頭（p.271）を参照。

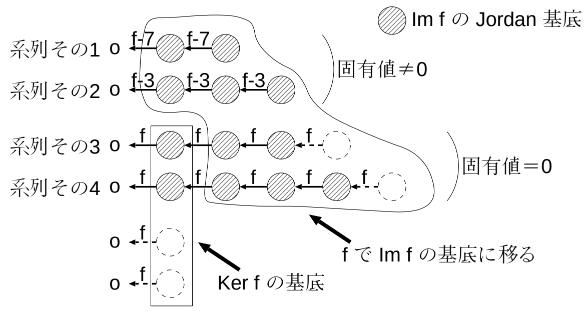
[4] 行列で言うと……A を Jordan 標準形に変換する変換行列 P が得られたら、同じ P により、任意の複素数 c に対する $A - cI$ も Jordan 標準形に変換できる。そりゃそうですね。

ばそれは f の Jordan 基底でもある。というわけで、この $f-\mu$ を改めて f ととり直せばよい。

f を $\mathrm{Im}\, f$ 上に制限して考えてみると、これは部分空間 $\mathrm{Im}\, f$ から $\mathrm{Im}\, f$ 自身への線形写像と解釈できる。$\mathrm{Im}\, f$ の次元（$= \mathrm{rank}\, f$）は n より小さいので、帰納法の前提により、これは Jordan 基底を持つ。すなわち、$\mathrm{Im}\, f$ 上の Jordan 系列がいくつかあって、それらが $\mathrm{Im}\, f$ の基底となっている。

$\mathrm{Im}\, f$ 上のこんな Jordan 系列たち $\boldsymbol{p}_j(1 : l_j)$（$j = 1, \ldots, m$）を拡張して、全空間の Jordan 基底をいまから作ってみせる。Jordan 系列 $\boldsymbol{p}_j(1 : l_j)$ の固有値 μ_j が 0 の場合は、$\boldsymbol{p}_j(l_j) = f(\boldsymbol{p}_j(l_j + 1))$ となるような $\boldsymbol{p}_j(l_j + 1)$ を追加してやることで、一つ長い Jordan 系列 $\boldsymbol{p}_j(1 : l_j + 1)$ が作れる。このとき $f(\boldsymbol{p}_j(2 : l_j + 1)) = \boldsymbol{p}_j(1 : l_j)$ となることに注意する。一方、$\mu_j \neq 0$ の場合は、(1) より $\mathrm{span}(f(\boldsymbol{p}_j(1 : l_j))) = \mathrm{span}(\boldsymbol{p}_j(1 : l_j))$ である。したがって、$\mu_j = 0$ な j については $\boldsymbol{p}_j(2 : l_j + 1)$ をとり、$\mu_j \neq 0$ な j については $\boldsymbol{p}_j(1 : l_j)$ 自体をとれば（$j = 1, \ldots, m$）、これら全体を f で移したものが $\mathrm{Im}\, f$ の基底をなす。ということは、これらと「$\mathrm{Ker}\, f$ の基底」とをあわせたら全空間の基底が得られる[5]。

また、$\mu_j = 0$ な j たちの $\boldsymbol{p}_j(1)$ は、前提から $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ の基底をなしている。したがって、それらに $\mathrm{Ker}\, f$ 内の適当なベクトル $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$ を追加して、$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を構成することができる。追加した $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$ は、それぞれが「固有値 0 で長さが 1 の Jordan 系列」とみなされる。



以上により、$\mu_j = 0$ な j たちについての $\boldsymbol{p}(1 : l_j + 1)$、$\mu_j \neq 0$ な j たちについての $\boldsymbol{p}(1 : l_j)$、および $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$ をあわせれば f の Jordan 基底となる。任意の f は Jordan 基底を持つことがこれで示された。

参考文献

[1] J.I. Hall: “Another elementary approach to the Jordan form”, American Mathematical Monthly, vol. 98, no. 4, pp. 336–340, 1991.

[2] K. Kudo, Y. Kakinuma, K. Hiraoka, et al.: “Algorithm for computing Jordan basis”, JSIAM Letters, Vol. 2, pp. 119–122, 2010.
`http://www.jstage.jst.go.jp/browse/jsiaml/2/0/_contents`

[3] 平岡和幸, 堀玄: プログラミングのための線形代数, オーム社, 2004.

[5] もし $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底で、$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底だったら、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は全空間の基底となる。証明は [3] の 121 ページ「？2.16」を参照。